

## 1 Nombres complexes

### Exercice 1 ★ Forme algébrique - Somme et produits –

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1.  $z_1 = (2 + 5i) + (i + 3)$
2.  $z_2 = 4(-2 + 3i) + 3(-5 - 8i)$
3.  $z_3 = (2 - i)(3 + 8i)$
4.  $z_4 = (1 - i)(1 + i)$
5.  $z_5 = i(1 - 3i)^2$
6.  $z_6 = (1 + i)^3$

Attention ! Il y a un symbole de conjugaison dans  $z_4$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1]

### Exercice 2 ★ Forme algébrique - quotients –

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1.  $z_1 = \frac{1}{1+i}$
2.  $z_2 = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$
3.  $z_3 = \frac{1-2i}{3+i}$
4.  $z_4 = \frac{(3+5i)^2}{1-2i}$
5.  $z_5 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i}$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2902]

### Exercice 3 ★★ –

Résoudre les systèmes suivants, d'inconnues les nombres complexes  $z_1$  et  $z_2$  :

1. 
$$\begin{cases} 2z_1 - z_2 &= i \\ -2z_1 + 3iz_2 &= -17 \end{cases}$$
2. 
$$\begin{cases} 3iz_1 + iz_2 &= i + 7 \\ iz_1 + 2z_2 &= 11i \end{cases}$$

On donnera les résultats sous forme algébrique.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2411]

### Exercice 4 ★ Forme exponentielle –

Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

1.  $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$
2.  $z_2 = 9i$
3.  $z_3 = -3$
4.  $z_4 = \frac{-i\sqrt{2}}{1+i}$
5.  $z_5 = \frac{(1+i\sqrt{3})^3}{(1-i)^5}$
6.  $z_6 = \sin x + i \cos x$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2]

### Exercice 5 ★ Forme exponentielle –

On pose  $z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$ ,  $z_2 = 3ie^{i\frac{\pi}{6}}$ ,  $z_3 = -2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ . Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes :  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$ ,  $z_1 z_2$ ,  $\frac{z_1 z_2}{z_3}$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2930]

### Exercice 6 ★ Les deux à la fois - avec application –

On considère les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3}, z_2 = 1 + i \text{ et } z_3 = \frac{z_1}{z_2}.$$

1. Écrire  $z_3$  sous forme algébrique.
2. Écrire  $z_3$  sous forme trigonométrique.
3. En déduire les valeurs exactes de  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3]

### Exercice 7 Forme algébrique –

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$1. z_1 = (2 + 2i)^6 \quad 2. z_2 = \left( \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} \right)^{20} \quad 3. z_3 = \frac{(1 + i)^{2000}}{(i - \sqrt{3})^{1000}}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[4]

### Exercice 8 Réel positif –

Trouver les entiers  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $(1 + i\sqrt{3})^n$  soit un réel positif.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[5]

### Exercice 9 Forme exponentielle et formule d'Euler –

Soient  $a, b \in ]0, \pi[$ . Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$1. z_1 = 1 + e^{ia} \quad 2. z_2 = 1 - e^{ia} \quad 3. z_3 = e^{ia} + e^{ib} \quad 4. z_4 = \frac{1 + e^{ia}}{1 + e^{ib}}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[6]

### Exercice 10 Transformation de Cayley –

Soient  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes de module 1 tels que  $zz' \neq -1$ . Démontrer que  $\frac{z+z'}{1+zz'}$  est réel, et préciser son module.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[7]

### Exercice 11 Le même module –

Déterminer les nombres complexes non nuls  $z$  tels que  $z$ ,  $\frac{1}{z}$  et  $1 - z$  aient le même module.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[8]

### Exercice 12 Homographie –

Soit  $z$  un nombre complexe,  $z \neq 1$ . Démontrer que :

$$|z| = 1 \iff \frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[10]

### Exercice 13 Module de la somme et de la différence –

Soient  $z = \rho e^{i\theta}$  et  $z' = \rho' e^{i\theta'}$  deux nombres complexes non nuls. Démontrer que

$$|z + z'| = |z - z'| \iff \theta' = \theta + \frac{\pi}{2}[\pi].$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[11]

### Exercice 14 Entiers somme de deux carrés –

On dit qu'un entier naturel  $N$  est somme de deux carrés s'il existe deux entiers naturels  $a$  et  $b$  de sorte que  $N = a^2 + b^2$ .

1. Écrire un algorithme permettant de déterminer si un entier naturel  $N$  est somme de deux carrés.
2. On souhaite prouver que, si  $N_1$  et  $N_2$  sont sommes de deux carrés, alors leur produit  $N_1 N_2$  est aussi somme de deux carrés. Pour cela, on écrit  $N_1 = a^2 + b^2$  et  $N_2 = c^2 + d^2$ , et on introduit  $z_1 = a + ib$ ,  $z_2 = c + id$ . Comment écrire  $N_1$  et  $N_2$  en fonction de  $z_1$  et  $z_2$  ?
3. En déduire que  $N_1 N_2$  est somme de deux carrés.
4. Démontrer que si  $N$  est somme de deux carrés, alors pour tout entier  $p \geq 1$ ,  $N^p$  est somme de deux carrés.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[13]

### Exercice 15 ★★★★★ Automorphisme du disque –

Soit  $a$  un complexe de module  $|a| < 1$ .

1. Démontrer que, pour tout nombre complexe  $z$  tel que  $1 - \bar{a}z \neq 0$ ,

$$1 - \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right|^2 = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \bar{a}z|^2}.$$

2. Déterminer les nombres complexes  $z$  vérifiant  $\left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| \leq 1$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[9]

### Exercice 16 ★★★★★ Égalité dans l'inégalité triangulaire –

Soient  $z_1, \dots, z_n$  des nombres complexes tous non nuls. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que

$$|z_1 + \dots + z_n| = |z_1| + \dots + |z_n|.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[12]

## 2 Complexes et équations

### Exercice 17 ★★ Exponentielle –

Résoudre l'équation  $e^z = 3\sqrt{3} - 3i$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[25]

### Exercice 18 ★ Équations du premier degré –

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$  :

- |                                   |                                |
|-----------------------------------|--------------------------------|
| 1. $z + 2i = iz - 1$              | 2. $(3 + 2i)(z - 1) = i$       |
| 3. $(2 - i)z + 1 = (3 + 2i)z - i$ | 4. $(4 - 2i)z^2 = (1 + 5i)z$ . |

On écrira les solutions sous forme algébrique.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2904]

### Exercice 19 ★ Équations avec des conjuguées. –

Résoudre les équations suivantes :

1.  $2z + i = \bar{z} + 1$
2.  $2z + \bar{z} = 2 + 3i$
3.  $2z + 2\bar{z} = 2 + 3i$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2517]

**Exercice 20** ★★ **Racine carrée d'un nombre complexe –**

Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants :  $z_1 = 3 + 4i$ ,  $z_2 = 8 - 6i$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[15]

**Exercice 21** ★★ **Racine carrée de deux façons –**

Déterminer les racines carrées de  $Z = \sqrt{3} + i$  sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique. En déduire la valeur de  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[16]

**Exercice 22** ★ **Racine carrée puis équation du second degré –**

1. Calculer les racines carrées du nombre complexe  $1 + 2\sqrt{2}i$  sous forme algébrique.

2. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^2 + iz - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2971]

**Exercice 23** ★★ **Racines  $n$ -ièmes –**

Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. z^3 = 1 + i\sqrt{3} & 2. z^6 = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}} \\ 3. z^5 = \frac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1+i)^2}. \end{array}$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[18]

**Exercice 24** ★★ **Presque des racines de l'unité –**

Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. (z-1)^5 = (z+1)^5 & 2. \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 = 0 \\ 3. (z+i)^n = (z-i)^n. \end{array}$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[19]

**Exercice 25** ★★★ **Variations sur les équations classiques –**

Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. iz^8 + iz^4 + 1 + i = 0 & 2. z^n = \bar{z} \ (n \geq 2) \\ 3. z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0 & 4. 1 + 2z + \dots + 2z^{n-1} + z^n = 0 \end{array}$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[20]

**Exercice 26** ★★★ **Degré plus grand –**

On cherche à résoudre l'équation

$$z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = 0.$$

1. Rechercher une solution imaginaire pure  $ai$  à l'équation.

2. Déterminer  $b, c \in \mathbb{R}$  tels que

$$z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = (z-ai)(z^2 + bz + c).$$

3. En déduire toutes les solutions de l'équation.

4. Sur le même modèle, résoudre l'équation  $z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i = 0$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[21]

---

**Exercice 27** ★★★★★ Degré plus grand –

Résoudre l'équation  $4iz^3 + 2(1+3i)z^2 - (5+4i)z + 3(1-7i) = 0$ , sachant qu'elle admet une racine réelle.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[22]

### 3 Complexes et géométrie

---

**Exercice 28** ★ Lieu géométrique et arguments –

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . Déterminer l'ensemble des points  $M$  dont l'affixe  $z$  vérifie la relation demandée :

1.  $\arg(z-2) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$
2.  $\arg(z-2) = \frac{\pi}{2} [\pi]$
3.  $\arg(iz) = \frac{\pi}{4} [\pi]$
4.  $\arg\left(\frac{z}{1+i}\right) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$
5.  $\arg\left(\frac{z-2i}{z-1+i}\right) = \frac{\pi}{2} [\pi]$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[26]

---

**Exercice 29** ★★ Lieux géométriques et module –

Déterminer le lieu géométrique des points  $M$  dont l'affixe  $z$  vérifie

1.  $|z-i| = |z+i|$
2.  $\frac{|z-3+i|}{|z+5-2i|} = 1$
3.  $|(1+i)z-2i| = 2$
4.  $|3+iz| = |3-iz|$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[24]

---

**Exercice 30** ★ Écriture complexe de transformations –

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations géométriques données par l'écriture complexe suivante :

1.  $z \mapsto \frac{1}{i}z$
2.  $z \mapsto z + (2+i)$
3.  $z \mapsto (1+i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1-i)$
4.  $z \mapsto (1+i\tan\alpha)z - i\tan\alpha, \alpha \in [0, \pi/2[$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[27]

---

**Exercice 31** ★★ Les huit carrés –

Soit la figure suivante :

Le but de l'exercice est de démontrer que  $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4} [2\pi]$ . On se place dans le repère orthonormé direct  $(A, \vec{u}, \vec{v})$  où  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ .

1. Reproduire la figure et placer les points  $E$  et  $F$  sur  $[DZ]$  tels que  $\beta$  et  $\gamma$  soient des mesures respectives de  $(\vec{u}, \overrightarrow{AE})$  et  $(\vec{u}, \overrightarrow{AF})$ .

2. Quelles sont les affixes  $z_Z, z_E$  et  $z_F$  des points  $Z, E$  et  $F$  ?

3. Démontrer que  $z_Z \times z_E \times z_F = 65(1+i)$ .

4. Conclure.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2369]

---

**Exercice 32** ★★★★★ Une coquille d'escargot –

Dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on note  $A_0$  le point d'affixe 6 et  $S$  la similitude de centre  $O$ , de rapport  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  et d'angle  $\frac{\pi}{6}$ . On pose  $A_{n+1} = S(A_n)$  pour  $n \geq 1$ .

1. Déterminer, en fonction de  $n$ , l'affixe du point  $A_n$ . En déduire que  $A_{12}$  est sur la demi-droite  $(O, \vec{i})$ .

2. Établir que le triangle  $OA_nA_{n+1}$  est rectangle en  $A_{n+1}$ .
  3. Calculer la longueur du segment  $[A_0A_1]$ . En déduire la longueur  $\ell$  de la ligne polygonale  $A_0A_1A_2 \dots A_{12}$ .
- [Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [28]

### Exercice 33 ★★★★★ Lieux géométriques –

Pour chacune des conditions suivantes, déterminer le lieu géométrique des points  $M$  d'affixe  $z$  qui vérifient la condition.

1.  $I(i)$  et  $M'(iz)$  sont alignés avec  $M$ ; déterminer alors l'ensemble des points  $M'$  correspondants;
2.  $\Re\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0$ ;
3.  $M, P$  d'affixe  $z^2$  et  $Q$  d'affixe  $z^3$  sont les sommets d'un triangle rectangle.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [29]

### Exercice 34 ★★★★★ Points à coordonnées entières –

Soit  $ABCD$  un carré dans le plan complexe. Prouver que, si  $A$  et  $B$  sont à coordonnées entières, il en est de même de  $C$  et  $D$ . Peut-on trouver un triangle équilatéral dont les trois sommets sont à coordonnées entières ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [30]

### Exercice 35 ★★★★★ A partir des racines $n$ -ièmes –

Soit  $a$  un nombre complexe de module 1,  $z_1, \dots, z_n$  les racines de l'équation  $z^n = a$ . Montrer que les points du plan complexe dont les affixes sont  $(1+z_1)^n, \dots, (1+z_n)^n$  sont alignés.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [33]

### Exercice 36 ★★★★★ Alignement de puissances –

Trouver tous les nombres complexes  $z$  tels que les points d'affixe  $z, z^2$  et  $z^4$  soient alignés.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [34]

### Exercice 37 ★★★★★ Triangle équilatéral –

Soient  $A, B$  et  $C$  trois points non alignés d'affixe  $a, b$  et  $c$ . On note  $j = e^{2i\pi/3}$ .

1. Montrer que le triangle  $ABC$  est équilatéral direct si et seulement si  $a + bj + cj^2 = 0$ .
2. On ne suppose pas nécessairement que  $ABC$  est équilatéral. On construit à partir de  $ABC$  les trois triangles équilatéraux de base  $AB, AC$  et  $BC$  construits à l'extérieur du premier. Montrer que les centres de gravité de ces trois triangles forme un triangle équilatéral.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [31]

### Exercice 38 ★★★★★ Triangle équilatéral –

Montrer que le triangle de sommets  $M_1(z_1), M_2(z_2)$  et  $M_3(z_3)$  est équilatéral si et seulement si

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [32]

## 4 Complexes et trigonométrie

### Exercice 39 ★ Linéariser ! –

1. Établir la formule de trigonométrie  $\cos^4(\theta) = \cos(4\theta)/8 + \cos(2\theta)/2 + 3/8$ .
2. Fournir une relation analogue pour  $\sin^4(\theta)$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [3086]

---

**Exercice 40** ★ **Linéariser !** –

Linéariser  $\cos^5 x$ ,  $\sin^5 x$  et  $\cos^2 x \sin^3 x$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[57]

---

**Exercice 41** ★ **Addition** –

1. Démontrer la formule de trigonométrie  $\cos(4\theta) = \cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) + \sin^4(\theta)$ .
2. Fournir une relation analogue pour  $\sin(4\theta)$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3087]

---

**Exercice 42** ★ **Addition** –

Exprimer  $\cos(5x)$  et  $\sin(5x)$  en fonction de  $\cos x$  et  $\sin x$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[58]

---

**Exercice 43** ★★ ★ **Un calcul d'intégrale** –

Calculer  $\int_0^{\pi/2} \cos^4 t \sin^2 t dt$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[59]

---

**Exercice 44** ★★ ★ **Sommes trigonométriques** –

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x, y \in \mathbb{R}$ . Calculer les sommes suivantes :

1.  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(x + ky)$  ;
2.  $S = \sum_{k=0}^n \frac{\cos(kx)}{(\cos x)^k}$  et  $T = \sum_{k=0}^n \frac{\sin(kx)}{(\cos x)^k}$ , avec  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  ;
3.  $D_n = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$  et  $K_n = \sum_{k=0}^n D_k$ , avec  $x \neq 0 + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[60]

---

**Exercice 45** ★★ ★ **Calcul d'un cosinus** –

A partir de la somme des racines 5-ièmes de l'unité, calculer  $\cos(2\pi/5)$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[62]

---

---

**Indication pour l'exercice 1 ▲**

Pour les deux premiers exemples, il suffit de regrouper. Pour les produits, il faut développer puis regrouper.

---

**Indication pour l'exercice 2 ▲**

Il faut multiplier le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur.

---

**Indication pour l'exercice 3 ▲**

Résoudre ces systèmes comme on le ferait pour des systèmes dans  $\mathbb{R}$ , mais en menant les calculs dans  $\mathbb{C}$  !

---

**Indication pour l'exercice 4 ▲**

On commence par mettre sous forme trigonométrique en mettant le module du nombre complexe en facteur. Pour les produits, quotients, on a intérêt à d'abord calculer séparément la forme trigonométrique de chaque nombre complexe.

---

**Indication pour l'exercice 5 ▲****Indication pour l'exercice 6 ▲**

Pour la dernière question, on pourra comparer les formes algébrique et trigonométriques.

---

**Indication pour l'exercice 7 ▲**

Commencer par calculer la forme trigonométrique.

---

**Indication pour l'exercice 8 ▲**

Écrire  $1 + i\sqrt{3}$  sous forme exponentielle.

---

**Indication pour l'exercice 9 ▲**

Dans une somme ou une différence de deux complexes de module 1,  $e^{ix} \pm e^{iy}$ , mettre en facteur  $e^{i\frac{x+y}{2}}$  puis utiliser les formules d'Euler.

---

**Indication pour l'exercice 10 ▲**

Écrire  $z = e^{i\theta}$ ,  $z' = e^{i\theta'}$  et utiliser les formules d'Euler.

---

**Indication pour l'exercice 11 ▲**

Écrire d'abord que  $|z|^2 = 1$ . Comment peut-on alors écrire  $z$  ? Puis calculer le module de  $1 - z$ .

---

**Indication pour l'exercice 12 ▲**

Ecrire un nombre complexe de module 1 sous la forme  $e^{i\theta}$ , puis factoriser par l'angle moitié.

---

**Indication pour l'exercice 13 ▲**

Passer au carré, et développer !

---

**Indication pour l'exercice 14 ▲**

- 1.
2. Penser aux modules.



3. Le module est multiplicatif.

4. Raisonner par récurrence.

---

**Indication pour l'exercice 15 ▲**

Pour la deuxième question, mettre au carré et faire la différence.

---

**Indication pour l'exercice 16 ▲**

Prouver que c'est vrai si et seulement si  $z_i = \lambda_i z_1$  avec  $\lambda_i$  un réel positif.

---

**Indication pour l'exercice 17 ▲**

Poser  $z = a + ib$  et mettre  $3\sqrt{3} - 3i$  sous forme trigonométrique.

---

**Indication pour l'exercice 18 ▲**

Il suffit de résoudre cette équation comme toute équation linéaire.

---

**Indication pour l'exercice 19 ▲**

Écrire  $z = x + iy$  et utiliser que deux nombres complexes sont égaux s'ils ont les mêmes parties réelles et les mêmes parties imaginaires.

---

**Indication pour l'exercice 20 ▲**

Poser  $z = a + ib$ , écrire  $z^2 = z_1$  et  $|z|^2 = |z_1|$ .

---

**Indication pour l'exercice 21 ▲**

---

**Indication pour l'exercice 22 ▲**

1. Méthode usuelle...

2. Méthode usuelle...

---

**Indication pour l'exercice 23 ▲**

Mettre le membre de droite sous forme trigonométrique, puis utiliser le cours.

---

**Indication pour l'exercice 24 ▲**

1. Se ramener à  $w^5 = 1$  avec  $w = (z + 1)/(z - 1)$ .

2. Poser  $w = \frac{z+1}{z-1}$ .

3.  $z = i$  n'est pas solution, et se ramener à  $w^n = 1$ .

---

**Indication pour l'exercice 25 ▲**

1. Poser  $u = z^4$  ;

2. Quel est le module de  $z$  ? Puis faire comme si on doit résoudre  $z^n = 1$ ...

3. Somme géométrique.

4. Somme géométrique (deux fois !).

---

**Indication pour l'exercice 26 ▲**

1. Injecter  $ai$  dans l'équation, et annuler parties réelles et parties imaginaires.

2. Procéder par identification.

---

- 3.
- 4.

---

**Indication pour l'exercice 27 ▲**

---

---

**Indication pour l'exercice 28 ▲**

---

---

**Indication pour l'exercice 29 ▲**

---

Interpréter en termes de distance du point  $M$  d'affixe  $z$  à un ou plusieurs points.

---

---

**Indication pour l'exercice 30 ▲**

---

Suivre le cours, en recherchant notamment les points invariants de la transformation.

---

---

**Indication pour l'exercice 31 ▲**

---

---

**Indication pour l'exercice 32 ▲**

---

1. Commencer par donner l'écriture complexe de la transformation.
  2. Exprimer les affixes des vecteurs  $\overrightarrow{OA_n}$ ,  $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$  et  $\overrightarrow{OA_{n+1}}$  en fonction de  $z_n$ , et utiliser par exemple la réciproque du théorème de Pythagore.
  3. Quel est l'effet d'une similitude sur les distances ?
- 

---

**Indication pour l'exercice 33 ▲**

---

1. Traduire l'alignement en termes d'angles.
  2. Traduire la condition en terme d'orthogonalité.
  3. Il y a trois possibilités d'orthogonalité. Raisonner ensuite comme à la question précédente.
- 

---

**Indication pour l'exercice 34 ▲**

---

$D$  est l'image de  $B$  par la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\pi/2$ .

---

---

**Indication pour l'exercice 35 ▲**

---

Déterminer l'argument des  $(1 + z_k)^n$ . On pourra poser  $a = e^{i\theta}$  et calculer explicitement les  $z_k$ .

---

---

**Indication pour l'exercice 36 ▲**

---

Commencer par étudier les cas où deux des points sont confondus. Ensuite, raisonner en termes d'argument.

---

---

**Indication pour l'exercice 37 ▲**

---

1. Que vaut le quotient  $\frac{c-a}{b-a}$ .
  2. Utiliser quatre fois la question précédente !
- 

---

**Indication pour l'exercice 38 ▲**

---

Caractériser le fait d'être un triangle équilatéral par une rotation d'angle  $\pm\pi/3$ .

---

---

**Indication pour l'exercice 39 ▲**

---

Utiliser la formule d'Euler, puis la formule du binôme de Newton, puis regrouper astucieusement.

---

---

**Indication pour l'exercice 40 ▲**

Utiliser les formules d'Euler, puis la formule du binôme de Newton.

---

**Indication pour l'exercice 41 ▲**

Utiliser la formule de de Moivre, développer par la formule du binôme de Newton, puis regrouper les parties réelles et les parties imaginaires.

---

**Indication pour l'exercice 42 ▲**

Calculer  $\cos(5x) + i \sin(5x) = (e^{ix})^5$

---

**Indication pour l'exercice 43 ▲**

Linéariser les fonctions trigonométriques en utilisant les nombres complexes.

---

**Indication pour l'exercice 44 ▲**

1. Utiliser l'exponentielle complexe et la formule du binôme.
  2. Fabriquer  $S + iT$  et utiliser une somme géométrique.
  - 3.
- 

**Indication pour l'exercice 45 ▲**

Cette somme vaut 0. Y reconnaître  $\cos(2\pi/5)$  et  $\cos(4\pi/5)$ , et exprimer le deuxième cosinus en fonction du premier.

---

---

**Correction de l'exercice 1 ▲**

1. On regroupe simplement les parties réelles et les parties imaginaires. On trouve

$$z_1 = 5 + 6i.$$

2. De la même façon,

$$z_2 = (-8 + 12i) + (-15 - 24i) = -23 - 12i.$$

3. On développe, puis on regroupe pour trouver :

$$z_3 = 6 + 16i - 3i + 8 = 14 + 13i.$$

4. On écrit

$$z_4 = (1 - i)(1 - i) = 1 - 2i - 1 = -2i.$$

5. On commence par calculer  $(1 - 3i)^2$  :

$$(1 - 3i)^2 = 1 - 2 \times 1 \times 3i + (3i)^2 = 1 - 6i - 9 = -8 - 6i.$$

On multiplie ensuite par  $i$  :

$$i(1 - 3i)^2 = -8i - 6i^2 = 6 - 8i.$$

6. Le plus simple est de tout développer, en utilisant la formule du binôme de Newton ou, pour ceux qui ne la connaissent pas (encore), en écrivant  $(1 + i)^3 = (1 + i)^2(1 + i)$ . On trouve

$$\begin{aligned} z_6 &= (1 + i)^3 \\ &= (1 + i)^2(1 + i) \\ &= (1 + 2i + i^2)(1 + i) \\ &= (1 + 2i - 1)(1 + i) \\ &= 2i(1 + i) \\ &= 2i + 2i^2 \\ &= -2 + 2i. \end{aligned}$$

Avec la formule du binôme, on écrit simplement

$$z_6 = (1 + i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i.$$

---

**Correction de l'exercice 2 ▲**

Pour mettre un quotient sous forme algébrique, il faut multiplier le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur.

1. Le conjugué de  $1 + i$  est  $1 - i$  et donc on a

$$z_1 = \frac{1}{1 + i} = \frac{1 - i}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{1 - i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

2. Avec la même méthode, on trouve

$$z_2 = \frac{-4(1 - i\sqrt{3})}{(1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})} = \frac{-4(1 - i\sqrt{3})}{1 + 3} = -1 + i\sqrt{3}.$$

3. On écrit

$$\frac{1 - 2i}{3 + i} = \frac{(1 - 2i)(3 - i)}{(3 - i)(3 + i)} = \frac{1 - 7i}{9 + 1} = \frac{1}{10} - \frac{7}{10}i.$$

4. On fait la même chose mais on développe d'abord le numérateur. Puisque  $(3+5i)^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times 5i + (5i)^2 = 9 + 30i - 25 = -16 + 30i$ , on trouve :

$$z_4 = \frac{-16+30i}{1-2i} \times \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{-76-2i}{5}.$$

5. Ce n'est pas plus compliqué que les exemples précédents, mais il faut être méthodique dans les calculs. On écrit d'abord :

$$\frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{1+3i}{5}.$$

En élevant au carré,

$$\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 = \frac{-8+6i}{25}.$$

D'autre part, par la même méthode,

$$\frac{3+6i}{3-4i} = \frac{-3+6i}{5}.$$

En faisant la somme et en mettant tout au même dénominateur, on trouve finalement :

$$z_5 = -\frac{23}{25} + \frac{36}{25}i.$$

### Correction de l'exercice 3 ▲

Le fait de résoudre des systèmes avec des nombres complexes ne change pas la méthode de résolution. Seuls les calculs sont plus compliqués !

1. On a

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2z_1 - z_2 &= i \\ -2z_1 + 3iz_2 &= -17 \end{cases} &\iff \begin{cases} 2z_1 - z_2 &= i \\ (3i-1)z_2 &= -17+i \text{ (L1)+(L2)} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2z_1 &= i+z_2 \\ z_2 &= \frac{-17+i}{3i-1}. \end{cases} \end{aligned}$$

On met  $z_2$  sous forme algébrique en multipliant numérateur et dénominateur par  $-3i-1$  et on trouve  $z_2 = 2+5i$ . Finalement, revenant à  $z_1$ , on trouve que  $z_1 = 1+3i$ . Le système admet une unique solution donnée par  $z_1 = 1+3i$  et  $z_2 = 2+5i$ .

2. On a

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3iz_1 + iz_2 &= i+7 \\ iz_1 + 2z_2 &= 11i \end{cases} &\iff \begin{cases} 3iz_1 + iz_2 &= i+7 \\ 3iz_1 + 6z_2 &= 33i \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (i-6)z_2 &= 7-32i \\ iz_1 + 2z_2 &= 11i. \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc  $z_2 = \frac{7-32i}{i-6} = -2+5i$  après mise sous forme algébrique. On en déduit facilement que  $z_1 = 1-4i$ . Ce second système admet donc une unique solution donnée par  $z_1 = 1-4i$  et  $z_2 = -2+5i$ .

### Correction de l'exercice 4 ▲

1. Le module de  $1+i\sqrt{3}$  est

$$|1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2.$$

Il vient

$$z_1 = 2 \left( \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2e^{i\pi/3}.$$

2. On a  $9i = 9e^{i\pi/2}$ .

3. On a  $-3 = 3 \times (-1) = 3e^{i\pi}$ .

4. On écrit sous forme trigonométrique le numérateur et le dénominateur, puis on utilise les propriétés de l'exponentielle complexe. On a donc

$$\begin{aligned} -i\sqrt{2} &= \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{2}}; \\ 1+i &= \sqrt{2}e^{i\pi/4}. \end{aligned}$$

On conclut que

$$z_4 = e^{i(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{5\pi}{4}}.$$

5. On procède de la même façon. On a

$$1+i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$$

d'où

$$(1+i\sqrt{3})^3 = 8e^{i\pi}.$$

De même,

$$1-i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}e^{-i\pi/4},$$

d'où

$$(1-i)^5 = 4\sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{4}}.$$

On fait le quotient et on trouve :

$$z_5 = \sqrt{2}e^{i\pi(1+\frac{5}{4})} = \sqrt{2}e^{i\frac{9\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

6. Il faut faire attention, il faut avoir quelque chose de la forme  $\cos\theta + i\sin\theta$  pour obtenir une forme trigonométrique. L'idée ici est d'utiliser les formules de trigonométrie, et notamment le fait que

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \text{ et } \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$$

Il vient

$$z_6 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = e^{i(\frac{\pi}{2} - x)}.$$

### Correction de l'exercice 5 ▲

L'écriture  $z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$  est déjà la forme exponentielle de  $z_1$ . Pour  $z_2$ , on écrit

$$z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{6}} = 3e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

Pour  $z_3$ , on écrit

$$z_3 = 2e^{i\pi}e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}.$$

Pour  $z_1z_2$ , on écrit

$$z_1z_2 = 12e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3})} = 12e^{i\frac{11\pi}{12}}.$$

Pour  $z_1z_2/z_3$ , on écrit

$$\frac{z_1z_2}{z_3} = 6e^{i(\frac{11\pi}{12} - \frac{5\pi}{3})} = 6e^{-i\frac{9\pi}{12}} = 6e^{-i\frac{3\pi}{4}}.$$

### Correction de l'exercice 6 ▲

1. On utilise (classiquement !) la quantité conjuguée du dénominateur :

$$z_3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i.$$

2. On a

$$z_1 = 2e^{i\pi/3} \text{ et } z_2 = \sqrt{2}e^{i\pi/4},$$

d'où

$$z_3 = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}(\cos(\pi/12) + i\sin(\pi/12)).$$

3. D'après l'écriture trigonométrique, on obtient une autre écriture algébrique de  $z_3$  :

$$z_3 = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} + i\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}.$$

Par unicité de l'écriture sous forme algébrique, on en déduit

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \text{ et } \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

Remarquons qu'on aurait aussi pu obtenir ce résultat à partir de la formule de  $\cos(a-b)$  avec  $a = \frac{\pi}{3}$  et  $b = \frac{\pi}{4}$ .

---

### Correction de l'exercice 7 ▲

La méthode la plus facile, ici, consiste à calculer d'abord la forme trigonométrique qui se comporte bien mieux vis à vis des puissances, puis à revenir à la forme algébrique.

1. On écrit

$$2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

d'où

$$z_1 = 2^9 e^{3i\pi/2} = -512i.$$

2. On commence par passer par la forme trigonométrique :

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \frac{2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \sqrt{2}\frac{e^{i\pi/3}}{e^{-i\pi/4}} = \sqrt{2}e^{i7\pi/12}.$$

On en déduit que

$$z_2 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} = (\sqrt{2})^{20} e^{i\frac{140\pi}{12}} = 2^{10} e^{i\frac{35\pi}{3}}.$$

Puisque  $35\pi = 3 \times 5 \times 2\pi + 5\pi$ , on en déduit que

$$z_2 = 2^{10} e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2^9 (1 - i\sqrt{3}) = 512 - i512\sqrt{3}.$$

3. Avec la même méthode, on a

$$(1+i)^{2000} = 2^{1000} e^{i500\pi} = 2^{1000}.$$

De même,

$$(i - \sqrt{3})^{1000} = 2^{1000} e^{i5000\pi/6}.$$

Or,

$$2500 = 833 \times 3 + 1$$

d'où

$$(i - \sqrt{3})^{1000} = 2^{1000} e^{i4\pi/3}.$$

Il vient finalement :

$$z_3 = e^{-i4\pi/3} = e^{i2\pi/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

---

### Correction de l'exercice 8 ▲

On commence par écrire  $1 + i\sqrt{3}$  sous forme exponentielle :

$$1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}.$$

En prenant la puissance  $n$ -ième, on trouve

$$(1 + i\sqrt{3})^n = 2^n e^{in\pi/3}.$$

Ceci est un réel positif si et seulement si  $\sin(n\pi/3) = 0$  et  $\cos(n\pi/3) \geq 0$ . Or,  $\sin(n\pi/3) = 0$  si et seulement si  $n = 3k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Mais, pour ces valeurs de  $n$ , on a  $\cos(n\pi/3) = \cos(k\pi)$ , et ceci est positif si et seulement si  $k$  est pair. Ainsi, les entiers qui conviennent sont les multiples de 6.

### Correction de l'exercice 9 ▲

On utilise la méthode suivante : dans une somme ou une différence de deux complexes de module 1,  $e^{ix} \pm e^{iy}$ , on met en facteur  $e^{i\frac{x+y}{2}}$  puis on utilise les formules d'Euler.

1.

$$z_1 = e^{ia/2} (e^{-ia/2} + e^{ia/2}) = 2\cos(a/2)e^{ia/2}.$$

De plus,  $\cos(a/2) > 0$  car  $a \in ]0, \pi[$ , et on a bien obtenu l'écriture trigonométrique du complexe.

2. La même méthode donne

$$\begin{aligned} z_2 &= e^{ia/2} (e^{-ia/2} - e^{ia/2}) \\ &= -2i\sin(a/2)e^{ia/2} \\ &= 2\sin(a/2)e^{i(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{2})}. \end{aligned}$$

3. On a cette fois

$$z_3 = e^{i\frac{a+b}{2}} (e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{i\frac{b-a}{2}}) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a+b}{2}}.$$

C'est bien une forme trigonométrique de  $z_3$ , car  $-\frac{\pi}{2} < \frac{a-b}{2} < \frac{\pi}{2}$  et donc  $\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) > 0$ .

4. En utilisant le résultat de la première question, on trouve

$$z_4 = \frac{2\cos(a/2)e^{ia/2}}{2\cos(b/2)e^{ib/2}} = \frac{\cos(a/2)}{\cos(b/2)}e^{i\frac{a-b}{2}}.$$

### Correction de l'exercice 10 ▲

On écrit  $z = e^{i\theta}$ ,  $z' = e^{i\theta'}$  et on utilise les formules d'Euler en mettant en facteur  $e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$  en facteur au numérateur et au dénominateur. Il vient

$$\begin{aligned} \frac{z+z'}{1+zz'} &= \frac{e^{i\theta} + e^{i\theta'}}{1 + e^{i(\theta+\theta')}} \\ &= \frac{e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} + e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}}}{e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} + e^{-i\frac{\theta+\theta'}{2}}} \\ &= \frac{\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)}. \end{aligned}$$

On obtient bien un nombre réel, de module  $\left| \frac{\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)} \right|$ .

### Correction de l'exercice 11 ▲

De  $|z| = \left|\frac{1}{z}\right|$ , on tire que  $|z|^2 = 1$ , donc que  $|z| = 1$ , c'est-à-dire que  $z = e^{i\theta}$ , où  $\theta \in [0, 2\pi[$ . Calculons maintenant le module de  $1 - z$ . On écrit

$$1 - z = 1 - e^{i\theta} = e^{i\theta/2} (e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}) = -2i\sin(\theta/2)e^{i\theta/2}.$$



Le module de  $1 - z$  vaut donc 1 si et seulement si  $|\sin(\theta/2)| = 1/2$ . L'équation  $\sin(\theta/2) = 1/2$ , avec  $\theta \in [0, 2\pi[$  donne  $\theta = \pi/3$  ou  $\theta = 5\pi/3$ . L'équation  $\sin(\theta/2) = -1/2$  avec  $\theta \in [0, 2\pi[$  n'a pas de solutions puisque, si  $\theta \in [0, 2\pi[$ ,  $\theta/2 \in [0, \pi[$  et alors  $\sin(\theta/2) \in [0, 1]$ . Ainsi, si  $z$  est une solution, on a forcément  $z \in \{e^{i\pi/3}, e^{i5\pi/3}\}$ .

Réciproquement, on vérifie facilement que si  $z \in \{e^{i\pi/3}, e^{i5\pi/3}\}$ , alors  $z$ ,  $1/z$  et  $1 - z$  ont le même module, qui vaut 1.

### Correction de l'exercice 12 ▲

Supposons d'abord que  $|z| = 1$ . Alors  $z$  s'écrit  $z = e^{i\theta}$ , avec  $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ . On peut alors écrire :

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2})}{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2})} = \frac{2\cos(\theta/2)}{-2i\sin(\theta/2)} = i \frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$$

qui est bien un élément de  $i\mathbb{R}$ . Remarquons que l'on a le droit d'effectuer ce calcul car  $\sin(\theta/2)$  ne s'annule pas. Réciproquement, supposons que  $\frac{1+z}{1-z} = ia$ , avec  $a$  un réel. On va exprimer  $z$  en fonction de  $a$ , puis calculer son module. Il vient :

$$\frac{1+z}{1-z} = ia \iff 1+z = ia(1-z) \iff z(1+ia) = -1+ia \iff z = \frac{-1+ia}{1+ia}.$$

On en déduit que

$$|z| = \left| \frac{-1+ia}{1+ia} \right| = \frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a^2}} = 1,$$

ce qui prouve la réciproque.

### Correction de l'exercice 13 ▲

L'idée est de passer au carré, et de développer.

$$\begin{aligned} |z+z'| &= |z-z'| \iff |z+z'|^2 = |z-z'|^2 \\ &\iff (z+z')\overline{(z+z')} = (z-z')\overline{(z-z')} \\ &\iff |z|^2 + |z'|^2 + (z\overline{z'} + \overline{z}z') = |z|^2 + |z'|^2 - (z\overline{z'} + \overline{z}z') \\ &\iff |z|^2 + |z'|^2 + 2\Re(z\overline{z'}) = |z|^2 + |z'|^2 - 2\Re(z\overline{z'}). \end{aligned}$$

En simplifiant par les termes égaux, ceci est donc équivalent à

$$\Re(z\overline{z'}) = 0.$$

Or,  $\overline{z\overline{z'}} = \rho\rho'e^{i(\theta-\theta')}$ . Ceci a une partie réelle nulle si et seulement si  $\cos(\theta - \theta') = 0$ , c'est-à-dire si et seulement si  $\theta' = \theta + \frac{\pi}{2} [\pi]$ .

### Correction de l'exercice 14 ▲

1. Voici un algorithme qui convient (mais qui n'est pas du tout optimal!) : Variables : N,a,b,compteur  
 Algorithme : Lire N    compteur=0    Pour a allant de 0 à N faire    Pour b allant de 0 à N faire    Si (N=a\*a+b\*b) alors compteur=compteur+1 ; Finsi.    Fin pour    Fin pour    Si (compteur>0)    alors Afficher N est somme de deux carrés    sinon Afficher N n'est pas somme de deux carrés.

2. Il est facile de remarquer que  $N_1 = |z_1|^2$  et que  $N_2 = |z_2|^2$ .

3. On écrit, en utilisant le résultat de la question précédente, que

$$N_1 N_2 = |z_1 z_2|^2.$$

Or,

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc) = e + if$$

avec  $e = ac - bd$  et  $f = ad + bc$  qui sont des entiers. Ainsi,

$$N_1 N_2 = e^2 + f^2$$

est somme de deux carrés.

4. Prouvons par récurrence sur  $p$  la propriété  $\mathcal{P}(p)$  : " $N^p$  est somme de deux carrés". Clairement, la propriété  $\mathcal{P}(1)$  est vraie. Soit  $p \geq 1$  tel que  $\mathcal{P}(p)$  soit vérifiée. Alors  $N^{p+1} = N^p \times N$  est le produit de deux nombres qui sont chacun somme de deux carrés. D'après la question précédente,  $N^{p+1}$  est lui aussi somme de deux carrés, et  $\mathcal{P}(p+1)$  est vraie. Par le principe de récurrence,  $\mathcal{P}(p)$  est vraie pour tout entier  $p \geq 1$ .

### Correction de l'exercice 15 ▲

1. Il suffit de développer les modules au carré. Précisément, on a :

$$\begin{aligned} 1 - \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|^2 &= \frac{|1-\bar{a}z|^2 - |z-a|^2}{|1-\bar{a}z|^2} \\ &= \frac{1 - \bar{a}z - a\bar{z} + |a|^2|z|^2 - |z|^2 - |a|^2 + \bar{a}z + a\bar{z}}{|1-\bar{a}z|^2} \\ &= \frac{1 + |a|^2|z|^2 - |z|^2 - |a|^2}{|1-\bar{a}z|^2} \\ &= \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{a}z|^2}. \end{aligned}$$

2. On commence par remarquer que :

$$\left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| \leq 1 \iff \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|^2 \leq 1.$$

Ensuite, on a d'après la question précédente

$$1 - \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{a}z|^2}.$$

Ainsi, on a l'équivalence :

$$\left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| \leq 1 \iff \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{a}z|^2} \geq 0.$$

Or,  $1-|a|^2 \geq 0$  et  $|1-\bar{a}z|^2 \geq 0$ . On a donc la propriété voulue si et seulement si

$$1-|z|^2 \geq 0 \iff |z| \leq 1.$$

On remarque que dans ce cas, on a bien  $1-\bar{a}z \neq 0$  puisque  $|a| < 1$ .

### Correction de l'exercice 16 ▲

On va prouver que la propriété est vraie si et seulement s'il existe des réels positifs  $\lambda_i$  tels que  $z_i = \lambda_i z_1$ . Un sens est facile. En effet, si  $z_i = \lambda_i z_1$ , alors

$$|z_1 + \dots + z_n| = |z_1| \times |1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n| = |z_1| + \lambda_2|z_1| + \dots + \lambda_n|z_1| = |z_1| + \dots + |z_n|.$$

Réciproquement, on va prouver par récurrence sur  $n$  que si

$$|z_1 + \dots + z_n| = |z_1| + \dots + |z_n|,$$

alors il existe des réels positifs  $\lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  tels que  $z_i = \lambda_i z_1$ . On commence par traiter le cas  $n = 2$ , et on suppose que  $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ . Notons  $u = z_1/z_2$ . Alors on a  $|1+u| = 1+|u|$ , et en écrivant  $u = x + iy$ , on obtient

$$|1+u|^2 = (1+x)^2 + y^2 = 1 + |u|^2 + 2x \text{ et } (1+|u|)^2 = 1 + 2|u| + |u|^2.$$

On a donc  $x = |u|$ , ce qui entraîne que  $y = 0$  et que  $u$  est un réel positif. Le cas  $n = 2$  est donc prouvé. Supposons maintenant la propriété prouvée au rang  $n-1$  et prouvons-la au rang  $n$ . On commence par remarquer que

$$|z_1 + \dots + z_{n-1}| = |z_1| + \dots + |z_{n-1}|.$$

En effet, si on avait  $|z_1 + \dots + z_{n-1}| < |z_1| + \dots + |z_{n-1}|$ , on aurait aussi

$$|z_1 + \dots + z_n| \leq |z_1 + \dots + z_{n-1}| + |z_n| < |z_1| + \dots + |z_{n-1}| + |z_n|,$$

ce qui contredit l'hypothèse initiale. Par hypothèse de récurrence, on sait que pour  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , il existe  $\lambda_i > 0$  tel que  $z_i = \lambda_i z_1$ . Mais alors il vient

$$|z_1 + \dots + z_n| = |(1 + \dots + \lambda_{n-1})z_1 + z_n| = (1 + \dots + \lambda_{n-1})|z_1| + |z_n|.$$

On applique alors le cas  $n = 2$ , et on trouve que  $z_n = \mu_n(1 + \dots + \lambda_{n-1})z_1$  avec  $\mu_n > 0$ . On a le résultat voulu, quitte à poser  $\lambda_n = \mu_n(1 + \dots + \lambda_{n-1})$ .

### Correction de l'exercice 17 ▲

Posons  $z = a + ib$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Alors  $e^z = e^a e^{ib}$ . Ceci nous incite à mettre  $3\sqrt{3} - 3i$  sous forme trigonométrique. On obtient

$$|3\sqrt{3} - 3i| = \sqrt{27 + 9} = 6.$$

Il vient

$$3\sqrt{3} - 3i = 6 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = 6e^{-i\pi/6}.$$

On obtient alors  $\exp a = 6$  et  $b = -\pi/6 + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Les solutions de l'équation sont donc les nombres complexes  $\ln(6) + i(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

### Correction de l'exercice 18 ▲

1. L'équation est équivalente à

$$z(1-i) = -1-2i \iff z = \frac{-1-2i}{1-i} = \frac{(-1-2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i.$$

2. De la même façon, on a

$$z-1 = \frac{i}{3+2i} = \frac{i(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i.$$

On en déduit que

$$z = \frac{15}{13} + \frac{3}{13}i.$$

3. L'équation cette fois est équivalente à

$$\begin{aligned} (2-i-3-2i)z &= -i-1 \iff (-1-3i)z = -i-1 \\ \iff z &= \frac{-i-1}{-1-3i} = \frac{(-i-1)(-1+3i)}{(-1-3i)(-1+3i)} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i. \end{aligned}$$

4. On distingue deux cas. D'abord,  $z = 0$  est solution de l'équation. Si  $z \neq 0$ , alors on peut simplifier par  $z$  et l'équation est équivalente à

$$(4-2i)z = 1+5i \iff z = \frac{1+5i}{4-2i} = \frac{(1+5i)(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)} = \frac{-6+22i}{20} = \frac{-3}{10} + \frac{11}{10}i.$$

L'équation admet donc deux solutions,  $z = 0$  et  $z = \frac{-3}{10} + \frac{11}{10}i$ .

### Correction de l'exercice 19 ▲

1. On écrit  $z = x + iy$  avec  $x, y \in \mathbb{R}$  de sorte que  $2z + i = 2x + i(2y + 1)$  et  $\bar{z} + 1 = (x - iy) + 1 = (x + 1) - iy$ . Puisque deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'il ont même partie réelle et même partie

imaginaire, l'équation est équivalente à  $2x = x + 1$  et  $2y + 1 = -y$ . On trouve alors  $x = 1$  et  $y = -1/3$ . L'équation admet une unique solution,  $z = 1 - \frac{1}{3}i$ .

2. On reprend la même méthode. Alors  $2z + \bar{z} = 3x + iy = 2 + 3i$  si et seulement si  $x = \frac{2}{3}$  et  $y = 3$ . L'équation admet donc une unique solution,  $z = \frac{2}{3} + 3i$ .

3. On procède de la même façon, mais cette fois on constate que  $2z + 2\bar{z} = 4x$  est réel : il ne pourra jamais être égal à  $2 + 3i$ . L'équation n'admet pas de solutions.

---

#### Correction de l'exercice 20 ▲

La méthode est toujours la même. On pose  $z = a + ib$ , de sorte que  $z^2 = (a^2 - b^2) + 2iab$ . L'équation  $z^2 = 3 + 4i$  est donc équivalente à

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases}$$

On peut ajouter une troisième équation en remarquant que

$$|z|^2 = |3 + 4i| \iff a^2 + b^2 = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

On trouve alors  $2a^2 = 8$ , soit  $a = \pm 2$  et  $2b^2 = 2$ , soit  $b = \pm 1$ . L'équation  $2ab = 4$  oblige  $a$  et  $b$  à avoir même signe, et donc les deux solutions sont  $2 + i$  et  $-2 - i$ . Pour l'équation  $z^2 = 8 - 6i$ , on peut suivre une méthode exactement identique, et les solutions sont cette fois  $3 - i$  et  $-3 + i$ .

---

#### Correction de l'exercice 21 ▲

Soit  $w = a + ib$  tel que  $w^2 = Z$ . On obtient le système

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = \sqrt{3} \\ 2ab = 1 \\ a^2 + b^2 = |\sqrt{3} + i| = 2. \end{cases}$$

Il vient  $a^2 = \frac{\sqrt{3}+2}{2}$  et  $b^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$ . Puisque  $a$  et  $b$  ont le même signe, les solutions sont donc

$$w = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}} + i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} \text{ et } w = -\sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}} - i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}.$$

Pour la résolution sous forme trigonométrique, on remarque que

$$Z = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) = 2e^{i\pi/6}.$$

Les racines carrées de  $Z$  sont donc

$$w = \sqrt{2}e^{i\pi/12} \text{ et } w = -\sqrt{2}e^{i\pi/12}.$$

Comme les deux calculs donnent le même résultat, en identifiant les parties réelles, on trouve :

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}},$$

d'où on tire :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

---

#### Correction de l'exercice 22 ▲

1. Soit  $z = x + iy$  tel que  $z^2 = 1 + 2\sqrt{2}i$ . Alors en identifiant les parties réelles, les parties imaginaires, et les modules, on trouve que  $x$  et  $y$  sont solutions du système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= 1 \\ 2xy &= 2\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 &= 3. \end{cases}$$

On trouve facilement que ceci entraîne  $2x^2 = 4$  et donc  $x = \sqrt{2}$  ou  $x = -\sqrt{2}$ . Le premier cas donne  $y = 1$  et le second  $y = -1$ . Les racines carrées de  $1 + 2\sqrt{2}i$  sont donc  $\sqrt{2} + i$  et  $-\sqrt{2} - i$ .

2. On commence par calculer le discriminant de cette équation du second degré :

$$\Delta = i^2 + 4 \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + 2i\sqrt{2} = (\sqrt{2} + i)^2.$$

Les solutions de cette équation sont donc

$$z_1 = \frac{-i + (\sqrt{2} + i)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{-i - (\sqrt{2} + i)}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i.$$

### Correction de l'exercice 23 ▲

C'est du cours !

1. On écrit

$$1 + i\sqrt{3} = 2 \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2e^{i\pi/3}.$$

Il vient

$$z^3 = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3} \iff z = 2^{1/3} e^{i(\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3})}, k \in \mathbb{Z}.$$

On obtient 3 nombres complexes différentes pour  $k = 0$ ,  $k = 1$  et  $k = 2$  qui sont  $2^{1/3}e^{i\pi/9}$ ,  $2^{1/3}e^{i7\pi/9}$  et  $2^{1/3}e^{i13\pi/9}$ .

2. On a

$$1 + i\sqrt{3} = 2 \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2e^{i\pi/3}.$$

On en déduit que

$$\frac{-4}{1 + i\sqrt{3}} = -2e^{-i\pi/3} = 2e^{2i\pi/3}.$$

Finalement,

$$z^6 = \frac{-4}{1 + i\sqrt{3}} \iff z = 2^{1/6} e^{i(\frac{k\pi}{3} + \frac{i\pi}{9})}, k \in \mathbb{Z}$$

(on peut se restreindre à  $k \in \{0, \dots, 5\}$ ).

3. On a

$$\frac{(1 + i\sqrt{3})^4}{(1 + i)^2} = \frac{2^4 \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^4}{2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2} = 2^3 \frac{e^{i\frac{\pi}{3} \times 4}}{e^{i\frac{\pi}{4} \times 2}}.$$

L'équation qu'on doit résoudre est donc :

$$z^5 = 2^3 e^{i\frac{5\pi}{6}} \iff \left( \frac{z}{2^{3/5} e^{i\pi/6}} \right)^5 = 1.$$

On en déduit que les solutions sont les complexes de la forme

$$z = 2^{3/5} e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{5})}, k \in \mathbb{Z}$$

(on peut se restreindre à  $k \in \{0, \dots, 4\}$ ).

---

**Correction de l'exercice 24 ▲**

---

1. 1 n'est pas solution, et l'équation est donc équivalente à

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^5 = 1.$$

Posons  $w = \frac{z+1}{z-1}$ , c'est-à-dire  $z = \frac{w+1}{w-1}$ . On a  $w^5 = 1$  si et seulement s'il existe  $k \in \{0, \dots, 4\}$  tel que  $w = e^{2ik\pi/5}$ . Si l'on retourne à  $z$ , on doit exclure  $w = 1$  car l'équation  $\frac{z+1}{z-1} = 1$  n'admet pas de solutions. On a donc 4 solutions qui sont

$$z = \frac{e^{2ik\pi/5} + 1}{e^{2ik\pi/5} - 1},$$

pour  $k = 1, \dots, 4$ . On peut encore simplifier en utilisant les formules d'Euler :

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{2ik\pi}{5}\right) + 1 &= \exp\left(\frac{2ik\pi}{5}\right) + \exp(0) \\ &= \exp\left(\frac{ik\pi}{5}\right) \left(\exp\left(\frac{ik\pi}{5}\right) + \exp\left(-\frac{ik\pi}{5}\right)\right) \\ &= 2 \exp\left(\frac{ik\pi}{5}\right) \cos(k\pi/5). \end{aligned}$$

De même, on trouve

$$\exp\left(\frac{2k\pi}{5}\right) - 1 = 2i \exp\left(\frac{ik\pi}{5}\right) \sin(k\pi/5).$$

L'ensemble des solutions est donc  $\{-i \cotan(k\pi/5); k = 1, \dots, 4\}$ .

2. Posons  $w = \frac{z+1}{z-1}$ . L'équation devient  $w^3 + \frac{1}{w^3} = 0$ , soit  $w^6 = -1 = e^{i\pi}$ . Ses racines sont

$$e^{i\pi/6 + k\pi/3}, \quad k = 0, \dots, 5.$$

On retrouve alors  $z$  car  $z = \frac{w+1}{w-1}$ . Pour  $k = 1$  ou  $k = 4$ , on trouve  $z = \pm i$ . Pour les autres valeurs de  $k$ , on trouve  $z = \pm i(2 \pm \sqrt{3})$ .

3. Remarquons d'abord que  $z = i$  n'est pas solution de l'équation. Ainsi, l'équation est équivalente à

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1.$$

Ceci est équivalent à dire qu'il existe  $k \in \{0, \dots, n-1\}$  tel que

$$\frac{z+i}{z-i} = \omega_k,$$

en notant  $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$ . Pour  $k = 0$ ,  $\omega_k = 1$  et l'équation  $\frac{z+i}{z-i} = 1$  n'a pas de solutions. Sinon, pour  $k = 1, \dots, n-1$ , on obtient les solutions

$$z_k = i \frac{\omega_k + 1}{\omega_k - 1}.$$

---

**Correction de l'exercice 25 ▲**

---

1. On commence par poser  $u = z^4$ , et l'équation devient  $iu^2 + iu + 1 + i = 0$ . Son discriminant est

$$\Delta = -1 - 4i(1+i) = 3 - 4i.$$

On cherche une racine carrée  $\delta$  de  $\Delta$  en posant  $\delta = a + ib$ , en utilisant  $\delta^2 = \Delta$  et  $|\delta|^2 = |\Delta| = 5$ , et on trouve qu'une des deux racines est  $\delta = 2 - i$ . Les racines de l'équation  $iu^2 + iu + 1 = 0$  sont donc les complexes

$$u_1 = \frac{-i - 2 + i}{2i} = i \text{ et } u_2 = \frac{-i + 2 - i}{2i} = -1 - i.$$

Reste à résoudre les équations  $z^4 = u_1$  et  $z^4 = u_2$ . Pour cela, on pose  $z = re^{i\theta}$  et on remarque que  $u_1 = e^{i\pi/2}$  et que  $u_2 = \sqrt{2}e^{i5\pi/4}$ . On en déduit

$$z^4 = e^{i\pi/2} \iff z = e^{i\pi/8+k\pi/2}, k = 0, \dots, 3;$$

$$z^4 = \sqrt{2}e^{i5\pi/4} \iff z = 2^{1/8}e^{i5\pi/16+k\pi/2}, k = 0, \dots, 3.$$

2. Remarquons d'abord que  $z = 0$  convient. Supposons désormais  $z \neq 0$ . Puisque  $|z| = |\bar{z}|$ , on a  $|z|^{n-1} = 1$  et donc  $|z| = 1$ . On peut donc poser  $z = e^{i\theta}$  et l'équation devient

$$e^{in\theta} = e^{-i\theta} \iff e^{i(n+1)\theta} = 1 \iff \theta = 2k\pi/(n+1), k \in \{0, \dots, n\}.$$

3. Remarquons que  $z = -1$  n'est pas racine de l'équation. On reconnaît alors le début de la somme géométrique de raison  $-z$ . L'équation est donc équivalente à

$$\frac{1 - (-z)^5}{1 + z} = 0 \iff z^5 = -1 = e^{i\pi}.$$

Les solutions de cette dernière équation sont les complexes de la forme  $e^{i\frac{(1+2k)\pi}{5}}$ ,  $k = 0, \dots, 4$  mais il faut faire attention que pour  $k = 2$ , on retrouve  $-1$ , valeur interdite ! Les solutions de l'équation initiale sont donc les quatre nombres complexes  $e^{i\pi/5}$ ,  $e^{3i\pi/5}$ ,  $e^{7i\pi/5}$ ,  $e^{9i\pi/5}$ .

4. On commence par écrire :

$$1 + 2z + \dots + 2z^{n-1} + z^n = (1 + z + \dots + z^{n-1}) + (z + \dots + z^n).$$

On reconnaît deux sommes géométriques de raison  $z$ . Comme  $z = 1$  n'est pas solution de l'équation, celle-ci est équivalente à

$$\frac{1 - z^n}{1 - z} + \frac{z - z^{n+1}}{1 - z} = 0 \iff 1 - z^n + z - z^{n+1} = 0 \iff (1 + z)(1 - z^n) = 0.$$

Les solutions sont donc  $z = -1$  et les racines  $n$ -ièmes de l'unité, excepté 1. Autrement dit,  $-1$  et  $e^{2ik\pi/n}$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ .

### Correction de l'exercice 26 ▲

1.  $ai$  est solution de l'équation si et seulement si

$$-i + (i-1)ai - (1+i)a^2 - ia^3 = (-a - a^2) + i(-1 - a - a^2 - a^3) = 0.$$

La partie réelle et la partie imaginaire du complexe doivent être nuls, et donc  $ai$  est solution de l'équation si et seulement si

$$\begin{cases} a + a^2 &= 0 \\ 1 + a + a^2 + a^3 &= 0. \end{cases}$$

La première équation donne  $a = 0$  ou  $a = -1$ , et seul  $-1$  convient pour la deuxième équation. Donc  $-i$  est solution de l'équation.

2. On cherche  $b, c$  tels que  $z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = (z+i)(z^2 + bz + c)$ . Pour cela, on développe le second membre et on trouve

$$(z+i)(z^2 + bz + c) = z^3 + (b+i)z^2 + (ib+c)z + ic.$$

Par identification, on doit avoir

$$\begin{cases} b+i &= 1+i \\ ib+c &= i-1 \\ ic &= -i \end{cases}$$

On trouve  $b = 1$  et  $c = -1$  et donc la factorisation

$$z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = (z+i)(z^2 + z - 1).$$

3.  $z$  est solution de l'équation si et seulement si  $z = -i$  ou  $z^2 + z - 1 = 0$ . Les racines de cette équation sont  $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$  et  $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ . L'équation admet donc trois solutions, qui sont  $-i$ ,  $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$  et  $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ .

4. On trouve que les solutions sont  $i$ ,  $1+i$  et  $1-i$ .

---

### Correction de l'exercice 27 ▲

Soit  $x$  une racine réelle, ie  $4ix^3 + 2(1+3i)x^2 - (5+4i)x + 3(1-7i) = 0$ . Partie réelle et partie imaginaire du membre de gauche doivent être nulles, on obtient donc après identification :

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 = 0 \\ 4x^3 + 6x^2 - 4x - 21 = 0. \end{cases}$$

Il est facile de résoudre la première équation et de vérifier si on obtient une racine de l'autre équation. On trouve que  $3/2$  est racine. On factorise alors le polynôme par  $z - 3/2$ , et on trouve (par exemple en procédant par identification) :

$$4iz^3 + 2(1+3i)z^2 - (5+4i)z + 3(1-7i) = (z - 3/2)(4iz^2 + 2(1+6i)z + 2(-1+7i)).$$

Reste à résoudre ensuite l'équation :

$$4iz^2 + 2(1+6i)z + 2(-1+7i) = 0$$

dont les solutions sont  $-2 + \frac{3}{2}i$  et  $-1 - i$ .

---

### Correction de l'exercice 28 ▲

1. Soit  $A$  le point d'affixe 2. Alors

$$\arg(z - 2) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \iff (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

L'ensemble recherché est donc la demi-droite passant par  $A$  et dirigée par  $\vec{v}$ , sauf le point  $A$ .

2. On a

$$\arg(z - 2) = \frac{\pi}{2} [\pi] \iff (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2} [\pi].$$

L'ensemble recherché est donc la droite passant par  $A$  et parallèle à l'axe des ordonnées, sauf le point  $A$ .

3. On a  $\arg(iz) = \arg(i) + \arg(z) = \frac{\pi}{2} + \arg(z) [2\pi]$ . On a donc

$$\arg(iz) = \frac{\pi}{4} [\pi] \iff \arg(z) = -\frac{\pi}{4} [\pi].$$

L'ensemble recherché est donc la droite  $y = -x$ , sauf l'origine du repère.

4. On a

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{z}{1+i}\right) &= \arg(z) - \arg(1+i) [2\pi] \\ &= \arg(z) - \frac{\pi}{4} [2\pi]. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\arg\left(\frac{z}{1+i}\right) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \iff \arg(z) = \frac{3\pi}{4} [2\pi].$$

Soit  $B$  un point tel que  $(\vec{u}, \overrightarrow{OB}) = \frac{3\pi}{4}$ , par exemple le point d'affixe  $-1+i$ . Alors l'ensemble recherché est la demi-droite  $[OB)$ , sauf le point  $O$ .

5. Soit  $C$  le point d'affixe  $2i$  et  $D$  le point d'affixe  $1-i$ . Alors

$$\arg\left(\frac{z-2i}{z-1+i}\right) = \arg\left(\frac{z-2i}{z-(1-i)}\right) = (\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MC}) [2\pi].$$



On a donc

$$\arg\left(\frac{z-2i}{z-1+i}\right) = \frac{\pi}{2} [\pi] \iff (\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MC}) = \frac{\pi}{2} [\pi].$$

L'ensemble recherché est donc le cercle de diamètre  $[CD]$ , sauf les points  $C$  et  $D$ .

---

### Correction de l'exercice 29 ▲

1. Soit  $A$  le point d'affixe  $i$ ,  $B$  le point d'affixe  $-i$ , et  $M$  le point d'affixe  $z$ . Alors  $|z-i|$  est la longueur  $AM$ ,  $|z+i|$  est la longueur  $BM$ , et la condition recherchée est  $AM = BM$ , c'est-à-dire  $M$  est sur la médiatrice de  $[AB]$ , soit encore  $M$  sur l'axe réel, soit  $z$  réel.

2.  $z = -5 + 2i$  n'est pas solution et l'équation est équivalente à  $|z-3+i| = |z+5-2i|$  soit encore  $|z-(3-i)| = |z-(-5+2i)|$ . Autrement dit, le point  $M$  d'affixe  $z$  est à égale distance du point  $A$  d'affixe  $3-i$  et du point  $B$  d'affixe  $-5+2i$ . L'ensemble des points recherché est donc la médiatrice de  $[AB]$ .

3. Factorisons par  $1+i$  dans le module. On trouve :

$$|1+i| \left| z - \frac{2i}{1+i} \right| = 2.$$

Puisque  $|1+i| = \sqrt{2}$  et  $\frac{2i}{1+i} = 1+i$ , ceci est équivalent à

$$|z - (1+i)| = \sqrt{2}.$$

Ainsi, l'ensemble des points  $M$  correspondants est le cercle de centre le point  $A(1, 1)$  et de rayon  $\sqrt{2}$ .

4. On a  $3+iz = i(-3i+z)$  et  $3-iz = -i(3i+z)$  et donc l'équation est équivalente à  $|z-3i| = |z-(-3i)|$ . Autrement dit, le point  $M$  d'affixe  $z$  est à égale distance du point  $A$  d'affixe  $3i$  et du point  $B$  d'affixe  $-3i$ . Le point  $M$  est donc sur la médiatrice de  $[AB]$  c'est-à-dire sur l'axe des abscisses.

---

### Correction de l'exercice 30 ▲

1. On écrit  $\frac{1}{i}z = e^{-i\pi/2}z$ , et on remarque que l'on a affaire à une rotation d'angle  $-\pi/2$ .

2. On a ici l'écriture d'une translation de vecteur  $(2, 1)$ .

3. L'application de la forme  $z \mapsto az + b$  est une similitude directe. Cherchons son centre qui est le point invariant, c'est-à-dire le point vérifiant  $z = (1+i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1-i)$ . On trouve  $z = 1+i$ , le centre de la similitude est donc le point  $A(1, 1)$ . On a de plus

$$1+i\sqrt{3} = 2 \left( \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2e^{i\pi/3}.$$

Le rapport de la similitude est donc égal à 2, et l'angle à  $\pi/3$ .

4. Si  $\alpha = 0$ , la transformation est simplement l'identité. Sinon, on a affaire à une similitude directe. Son point invariant est le nombre complexe  $z$  solution de l'équation

$$z = (1+i\tan\alpha)z - i\tan\alpha \iff z = 1.$$

Le centre de la similitude est donc le point  $A(1, 0)$ . De plus, on a

$$1+i\tan\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \times (\cos\alpha + i\sin\alpha) = \frac{1}{\cos\alpha} e^{i\alpha}.$$

Ainsi, la similitude est de rapport  $\frac{1}{\cos\alpha}$  et d'angle  $\alpha$ .

---

### Correction de l'exercice 31 ▲

1. Ces points s'obtiennent par translation (rappelons qu'une translation préserve les angles orientés). On obtient :

2. On a  $z_Z = 8+i$ ,  $z_E = 5+i$  et  $z_F = 2+i$ .

3. On a  $z_Z \times z_E = 39 + 13i$ , puis

$$z_Z \times z_E \times z_F = (39 + 13i) \times (2 + i) = 65 + 65i = 65(1 + i).$$

4. On écrit sous forme trigonométrique le nombre complexe précédent. Puisque  $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ , il vient

$$z_Z \times z_E \times z_F = 65\sqrt{2}e^{i\pi/4}.$$

D'où  $\arg(z_Z \times z_E \times z_F) = \pi/4 [2\pi]$ . Puisque l'argument d'un produit est la somme des arguments, on a

$$\arg(z_Z) + \arg(z_E) + \arg(z_F) = \frac{\pi}{4} [2\pi].$$

On conclut car, modulo  $2\pi$ ,  $\arg(z_Z) = \alpha$ ,  $\arg(z_E) = \beta$  et  $\arg(z_F) = \gamma$ .

---

### Correction de l'exercice 32 ▲

---

1. On va commencer par donner l'écriture complexe de la transformation. On a ainsi

$$S(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\pi/6}z.$$

Autrement dit, si on note  $z_n$  l'affixe du point  $A_n$ , on a

$$z_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\pi/6}z_n.$$

On reconnaît une suite géométrique (de raison  $r = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\pi/6}$  qui est un nombre complexe !). Par les théorèmes que l'on connaît, on en déduit que

$$z_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\pi/6}\right)^n z_0 = \frac{3^{n/2}}{2^n}e^{in\pi/6}z_0.$$

En particulier,  $z_{12} = \frac{3^6}{2^{12}}e^{i2\pi}6 = \frac{3^7}{2^{11}}$ . Le point  $A_{12}$  est bien situé sur la demi-droite  $(O, \vec{i})$ .

2. Le vecteur  $\overrightarrow{OA_n}$  est d'affixe  $z_n$ , le vecteur  $\overrightarrow{OA_{n+1}}$  est d'affixe  $z_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\pi/6}z_n$ , et le vecteur  $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$  est d'affixe  $z_{n+1} - z_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\pi/6} - 1\right)z_n$ . Pour démontrer que le triangle  $OA_nA_{n+1}$  est rectangle en  $A_{n+1}$ , on peut utiliser la réciproque du théorème de Pythagore. Or,

$$OA_n^2 = |z_n|^2,$$

$$OA_{n+1}^2 = \frac{3}{4}|z_n|^2,$$

et

$$\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\pi/6} - 1 = -\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4},$$

ce qui donne

$$A_nA_{n+1}^2 = \frac{1}{4}|z_n|^2.$$

On a bien

$$OA_n^2 = OA_{n+1}^2 + A_nA_{n+1}^2.$$

Une autre méthode possible est de vérifier que  $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}$  est un imaginaire pur, ce qui prouve l'orthogonalité des vecteurs  $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$  et  $\overrightarrow{OA_{n+1}}$ .

3. On sait que  $OA_0 = 6$  et que  $OA_1 = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Par le théorème de Pythagore,

$$A_0A_1 = 6\sqrt{1^2 - \frac{3}{4}} = 3.$$

Notons alors  $d_n$  la longueur du segment  $[A_n A_{n+1}]$ , de sorte que  $d_0 = 3$ . Puisqu'une similitude de rapport  $r$  multiplie les longueurs par  $r$ , on a

$$d_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} d_n.$$

La quantité recherchée est  $d_0 + \dots + d_{11}$ . Par la formule de la somme d'une suite géométrique, on trouve

$$d_0 + \dots + d_{11} = 3 \frac{1 - \frac{3^6}{2^{12}}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

### Correction de l'exercice 33 ▲

1. On sait que les points  $I, M$  et  $M'$  sont alignés si et seulement si

$$(\vec{IM}, \vec{IM}') = 0[\pi] \text{ ou } M = I \text{ ou } M' = I \text{ ou } M = M'.$$

En termes de nombres complexes, ceci se traduit par

$$\arg\left(\frac{iz - i}{z - i}\right) = 0[\pi] \text{ ou } z = i \text{ ou } iz = i \text{ ou } iz = z.$$

Introduisons le point  $A$  d'affixe 1. Alors, ceci devient

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} + \arg\left(\frac{z - 1}{z - i}\right) &= 0[\pi] \text{ ou } M = I \text{ ou } M = A \text{ ou } M = O \\ \iff (\vec{IM}, \vec{AM}) &= -\frac{\pi}{2}[\pi] \text{ ou } M = I \text{ ou } M = A \text{ ou } M = O \\ \iff (IM) \perp (AM) &\text{ ou } M = I \text{ ou } M = A \text{ ou } M = O. \end{aligned}$$

Les points  $M$  solutions sont donc les points du cercle de diamètre  $[AI]$  ( $O$  étant également un point de ce cercle). Puisque  $M'$  est image de  $M$  par rotation de centre  $O$  et d'angle  $\pi/2$ , les points  $M'$  correspondants sont sur l'image de ce cercle par cette rotation.

2. Notons  $A$  d'affixe 1 et  $I$  d'affixe  $i$ . La question s'écrit encore

$$\frac{z - 1}{z - i} = ia, \text{ avec } a \in \mathbb{R},$$

c'est-à-dire que les vecteurs  $\vec{AM}$  et  $\vec{IM}$  sont orthogonaux. Autrement dit, la condition est vérifiée si et seulement si  $M$  appartient au cercle de diamètre  $[AI]$ , excepté  $I$  (on doit avoir  $z \neq i$  pour définir le quotient).

3. On va d'abord supposer que  $z \neq 0, 1, -1$  pour que les trois points  $M, P, Q$  soient distincts et qu'on soit sûr d'avoir affaire à un vrai triangle. On va utiliser la condition suivante : soit  $A(a), B(b)$  et  $C(c)$ . Les droites  $(AB)$  et  $(AC)$  sont perpendiculaires si et seulement si

$$\exists m \in \mathbb{R}, \frac{c - a}{b - a} = mi \iff \Re\left(\frac{c - a}{b - a}\right) = 0.$$

On distingue alors trois cas :

le triangle est rectangle en  $M$ . Ceci est équivalent à

$$\Re\left(\frac{z^3 - z}{z^2 - z}\right) = 0 \iff \Re(z + 1) = 0 \iff \Re(z) = -1.$$

Les points  $M$  solutions sont alors ceux de la droite d'équation  $x = -1$ . le triangle est rectangle en  $P$ . Ceci est équivalent à

$$\Re\left(\frac{z^3 - z^2}{z - z^2}\right) = 0 \iff \Re(z) = 0.$$

Les points  $M$  solutions sont alors ceux de la droite d'équation  $x = 0$ . le triangle est rectangle en  $Q$ . Ceci est équivalent à

$$\Re\left(\frac{z-z^3}{z^2-z^3}\right) = 0 \iff \Re\left(\frac{z+1}{z}\right) = 0.$$

Notons  $D$  d'affixe -1 et  $O$  d'affixe 0. On obtient que les droites  $(DM)$  et  $(OM)$  sont orthogonales, c'est-à-dire que  $M$  décrit le cercle de diamètre  $[OD]$ .

4. le triangle est rectangle en  $M$ . Ceci est équivalent à

$$\Re\left(\frac{z^3-z}{z^2-z}\right) = 0 \iff \Re(z+1) = 0 \iff \Re(z) = -1.$$

Les points  $M$  solutions sont alors ceux de la droite d'équation  $x = -1$ .

5. le triangle est rectangle en  $P$ . Ceci est équivalent à

$$\Re\left(\frac{z^3-z^2}{z-z^2}\right) = 0 \iff \Re(z) = 0.$$

Les points  $M$  solutions sont alors ceux de la droite d'équation  $x = 0$ .

6. le triangle est rectangle en  $Q$ . Ceci est équivalent à

$$\Re\left(\frac{z-z^3}{z^2-z^3}\right) = 0 \iff \Re\left(\frac{z+1}{z}\right) = 0.$$

Notons  $D$  d'affixe -1 et  $O$  d'affixe 0. On obtient que les droites  $(DM)$  et  $(OM)$  sont orthogonales, c'est-à-dire que  $M$  décrit le cercle de diamètre  $[OD]$ .

### Correction de l'exercice 34 ▲

On note  $a = x + iy$  et  $b = x' + iy'$  les affixes respectives de  $A$  et  $B$ . Par hypothèse,  $x, x', y$  et  $y'$  sont des entiers. Puisque  $ABCD$  est un carré,  $D$  est l'image de  $B$  par la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\pi/2$ . Traduit en termes de nombres complexes, si  $d$  est l'affixe de  $D$ , ceci signifie que

$$d - a = i(b - a) \implies d = a + i(b - a) = x + iy + i((x' - x) + i(y' - y)) = x + y - y' + i(y + x' - x).$$

Ainsi, les coordonnées de  $D$  sont bien des entiers. Pour prouver que les coordonnées de  $C$  sont des entiers, on procède de la même façon, en utilisant cette fois le fait que  $C$  est l'image de  $A$  dans la rotation de centre  $D$  et d'angle  $\pi/2$ . Imaginons maintenant que  $ABC$  soit un triangle équilatéral dont les trois sommets sont à coordonnées entières, et gardons les notations précédentes. Alors,  $C$ , d'affixe  $c = x'' + iy''$  est l'image de  $B$  par la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\pi/3$ . Autrement dit,

$$c - a = e^{i\pi/3}(b - a) \implies c = (x + iy) + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)((x' - x) + i(y' - y)).$$

On développe, et après calcul, on trouve que

$$c = x + \frac{x' - x}{2} - \frac{\sqrt{3}(y' - y)}{2} + i\left(y + \frac{y' - y}{2} + \frac{\sqrt{3}(x' - x)}{2}\right).$$

Pour que la partie réelle de  $c$  soit un entier, il est nécessaire que  $y = y'$  et pour que la partie imaginaire de  $c$  soit nulle, il est nécessaire que  $x = x'$ . Finalement, ceci entraîne  $A = B$ , c'est-à-dire que le triangle est réduit à un point !

### Correction de l'exercice 35 ▲

Posons  $a = e^{i\theta}$ . Alors les racines de  $z^n = a$  sont données par  $z_k = e^{i(2k\pi + \theta)/n}$ ,  $k = 0, \dots, n-1$ . Factorisant par l'angle moitié et utilisant les formules d'Euler, on a

$$1 + z_k = 2 \cos\left(\frac{2k\pi + \theta}{2n}\right) e^{i(2k\pi + \theta)/2n}$$

soit

$$(1+z_k)^n = 2^n \cos^n \left( \frac{2k\pi + \theta}{2n} \right) e^{i(2k\pi + \theta)/2} = 2^n \cos^n \left( \frac{2k\pi + \theta}{2n} \right) e^{i(k\pi + \theta/2)}.$$

Tous les points d'affixe  $(1+z_k)^n$  sont donc situés sur la droite qui fait un angle  $\theta/2$  avec l'axe des abscisses. Ainsi, ils sont alignés.

---

### Correction de l'exercice 36 ▲

On commence par étudier les cas où deux de ces points sont confondus. L'équation  $z = z^2$  a pour solution  $z = 1$  et  $z = 0$ . L'équation  $z = z^4$  a pour solutions  $z = 0$  et  $z = 1, j, j^2$ . L'équation  $z^2 = z^4$  a pour solutions  $z = 0, 1, -1$ . On suppose désormais que  $z$  est différent des nombres précédemment trouvés, et on remarque que les points sont alignés si et seulement si

$$\arg \left( \frac{z^4 - z}{z^2 - z} \right) = 0 \pmod{\pi} \iff \frac{z^4 - z}{z^2 - z} \in \mathbb{R}.$$

Or, en notant  $z = x + iy$ , on a

$$\frac{z^4 - z}{z^2 - z} = \frac{z(z-1)(z^2 + z + 1)}{z(z-1)} = z^2 + z + 1 = (x^2 - y^2 + x + 1) + iy(2x + 1).$$

Ainsi, on en déduit que, dans ce cas, les points  $z, z^2$  et  $z^4$  sont alignés si et seulement si  $y = 0$  ou  $x = -1/2$ , c'est-à-dire si et seulement si  $z$  est réel ou sa partie réelle vaut  $-1/2$ . Remarquons que l'on retrouve les solutions précédentes,  $0, 1, -1, j$  et  $j^2$ .

---

### Correction de l'exercice 37 ▲

1.  $ABC$  est équilatéral direct si et seulement si  $C$  est l'image de  $B$  par la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\pi/3$ . En termes de nombres complexes, ceci se caractérise par

$$\frac{c-a}{b-a} = e^{i\pi/3} = -j^2 \iff c-a+j^2b-j^2a=0.$$

Or,  $1+j^2 = -j$  et en multipliant par  $j^2$ , on obtient le résultat voulu.

2. Quitte à échanger les rôles de  $B$  et  $C$ , on peut toujours supposer que le triangle est direct, c'est-à-dire que l'angle  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  est dans  $]0, \pi[$ . Notons  $AC'B, BA'C$  et  $CB'A$  les triangles équilatéraux directs obtenus. Soient aussi  $a', b', c'$  les affixes respectives de  $A', B'$  et  $C'$ . Alors, par la question précédente, on a les 3 équations :

$$\begin{cases} a + jc' + j^2b = 0 \\ b + ja' + j^2c = 0 \\ c + jb' + j^2a = 0. \end{cases}$$

Soit  $E, F, G$  les centres de gravité respectifs de  $AC'B, BA'C$  et  $CB'A$ , d'affixe respectives  $e = \frac{1}{3}(a+c'+b)$ ,  $f = \frac{1}{3}(b+a'+c)$  et  $g = \frac{1}{3}(c+b'+a)$ . D'après la question précédente, il suffit de prouver que  $e+jf+j^2g=0$ . Or,

$$3(e+jf+j^2g) = a+c'+b+jb+ja'+jc+j^2c+j^2b'+j^2a.$$

Or,  $c' = -j^2a - jb$ ,  $ja' = -b - j^2c$  et  $j^2b' = -jc - a$ , ce qui prouve bien que  $e+jf+j^2g=0$ . Le triangle  $EFG$  est équilatéral direct.

---

### Correction de l'exercice 38 ▲

Le triangle est équilatéral si et seulement si

$$z_3 - z_1 = e^{i\pi/3}(z_2 - z_1) \text{ ou } z_3 - z_1 = e^{-i\pi/3}(z_2 - z_1),$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$z_3 - (1 - e^{i\pi/3})z_1 - e^{i\pi/3}z_2 = 0 \text{ ou } z_3 - (1 - e^{-i\pi/3})z_1 - e^{-i\pi/3}z_2 = 0.$$

Ceci est encore équivalent à dire que le produit de ces deux quantités est nul, c'est-à-dire à

$$(z_3 - (1 - e^{i\pi/3})z_1 - e^{i\pi/3}z_2)(z_3 - (1 - e^{-i\pi/3})z_1 - e^{-i\pi/3}z_2) = 0.$$

En développant ce produit, on trouve exactement la condition demandée.

---

### Correction de l'exercice 39 ▲

---

1. D'après la formule d'Euler, on a

$$\cos^4(\theta) = \left( \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^4.$$

On développe ensuite en utilisant la formule du binôme de Newton et on trouve :

$$\begin{aligned}\cos^4(\theta) &= \frac{1}{16} \left( e^{4i\theta} + 4e^{3i\theta}e^{-i\theta} + 6e^{2i\theta}e^{-2i\theta} + 4e^{i\theta}e^{-3i\theta} + e^{-4i\theta} \right) \\ &= \frac{1}{16} \left( e^{4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 6 + 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta} \right) \\ &= \frac{1}{16} \left( e^{4i\theta} + e^{-4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 4e^{-2i\theta} + 6 \right) \\ &= \frac{1}{16} (2\cos(4\theta) + 8\cos(2\theta) + 6) \\ &= \frac{\cos(4\theta)}{8} + \frac{\cos(2\theta)}{2} + \frac{3}{8}.\end{aligned}$$

2. On fait la même chose, mais on part de

$$\sin^4(\theta) = \left( \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^4.$$

En utilisant le même argument, ainsi que  $i^4 = 1$ , on trouve

$$\begin{aligned}\sin^4(\theta) &= \frac{1}{16} \left( e^{4i\theta} - 4e^{2i\theta} + 6 - 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta} \right) \\ &= \frac{\cos(4\theta)}{8} - \frac{\cos(2\theta)}{2} + \frac{3}{8}.\end{aligned}$$

---

### Correction de l'exercice 40 ▲

---

On écrit :

$$\begin{aligned}\cos^5 x &= \left( \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^5 \\ &= \frac{1}{32} (e^{5ix} + 5e^{3ix} + 10e^{ix} + 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} + e^{-5ix}) \\ &= \frac{1}{16} (\cos(5x) + 5\cos(3x) + 10\cos(x)).\end{aligned}$$

Le même raisonnement donne

$$\sin^5 x = \frac{1}{16} (\sin(5x) - 5\sin(3x) + 10\sin(x)).$$

Pour la dernière expression, on procède ainsi :

$$\begin{aligned}
 \cos^2 x \sin^3 x &= \left( \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 \\
 &= \frac{e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}}{4} \times \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}}{-8i} \\
 &= \frac{e^{5ix} - e^{3ix} - 2e^{ix} + 2e^{-ix} + e^{-3ix} - e^{-5ix}}{-32i} \\
 &= \frac{2i \sin(5x) - 2i \sin(3x) - 4i \sin(x)}{-32i} \\
 &= \frac{-1}{16} \sin(5x) + \frac{1}{16} \sin(3x) + \frac{1}{8} \sin(x).
 \end{aligned}$$


---

#### Correction de l'exercice 41 ▲

1. D'après la formule de de Moivre, on sait que

$$\cos(4\theta) + i \sin(4\theta) = (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^4.$$

On développe le second membre, toujours en utilisant la formule du binôme :

$$\begin{aligned}
 (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^4 &= \cos^4(\theta) + 4\cos^3(\theta)(i \sin(\theta)) + 6\cos^2(\theta)(i \sin(\theta))^2 \\
 &\quad + 4\cos(\theta)(i \sin(\theta))^3 + (i \sin(\theta))^4 \\
 &= \cos^4(\theta) + 4i\cos^3(\theta)\sin(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) \\
 &\quad - 4i\cos(\theta)\sin^3(\theta) + \sin^4(\theta).
 \end{aligned}$$

Finalement, en identifiant les parties réelles et imaginaires, on trouve

$$\begin{aligned}
 \cos(4\theta) &= \cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) + \sin^4(\theta) \\
 \sin(4\theta) &= 4\cos^3(\theta)\sin(\theta) - 4\cos(\theta)\sin^3(\theta).
 \end{aligned}$$


---

#### Correction de l'exercice 42 ▲

On va partir, en utilisant la formule de de Moivre, de

$$\cos(5x) + i \sin(5x) = e^{i5x} = (e^{ix})^5 = (\cos x + i \sin x)^5.$$

On développe ensuite ce produit et on identifie parties réelles et parties imaginaires. On trouve

$$\cos(5x) = \cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x$$

et

$$\sin(5x) = 5\cos^4 x \sin x - 10\cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x.$$


---

#### Correction de l'exercice 43 ▲

On linéarise les fonctions trigonométriques à l'aide des nombres complexes :

$$\begin{aligned}
 \cos^4 t \sin^2 t &= \left( \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^4 \left( \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^2 \\
 &= \frac{-1}{2^6} (e^{i4t} + 4e^{i2t} + 6 + 4e^{-i2t} + e^{-i4t}) (e^{2it} - 2 + e^{-2it}) \\
 &= \frac{-1}{2^6} (e^{i6t} + 2e^{i4t} - e^{i2t} - 4 - e^{-i2t} + 2e^{-i4t} + e^{-i6t}) \\
 &= \frac{-1}{2^5} (\cos(6t) + 2\cos(4t) - \cos(2t) - 2).
 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \cos^4 t \sin^2 t dt &= \frac{-1}{2^5} \int_0^{\pi/2} (\cos(6t) + 2\cos(4t) - \cos(2t) - 2) dt \\ &= \frac{\pi}{32}.\end{aligned}$$

### Correction de l'exercice 44 ▲

1. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(x+ky) &= \Re \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ix} e^{iky} \right) \\ &= \Re \left( e^{ix} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{iy})^k 1^{n-k} \right) \\ &= \Re (e^{ix} (1 + e^{iy})^n) \\ &= \Re \left( e^{ix} e^{iny/2} (e^{-iy/2} + e^{iy/2})^n \right) \\ &= \Re \left( e^{i(x+ny/2)} (2\cos(y/2))^n \right) \\ &= 2^n \cos(x + ny/2) \cos^n(y/2).\end{aligned}$$

2. On utilise  $S + iT$  qui se calcule comme une somme géométrique :

$$S + iT = \sum_{k=0}^n \frac{e^{ikx}}{(\cos x)^k} = \sum_{k=0}^n \left( \frac{e^{ix}}{\cos x} \right)^k.$$

On distingue deux cas :

Si  $x = 0 [\pi]$ , alors  $\frac{e^{ix}}{\cos x} = 1$ , et  $S + iT = n + 1$ . On en déduit  $S = n + 1$  et  $T = 0$ . Si  $x \neq 0 [\pi]$ , alors

$$\begin{aligned}S + iT &= \frac{1 - \left( \frac{e^{ix}}{\cos x} \right)^{n+1}}{1 - \frac{e^{ix}}{\cos x}} \\ &= \frac{1}{(\cos x)^n} \times \frac{(\cos x)^{n+1} - e^{ix(n+1)}}{\cos x - e^{ix}} \\ &= \frac{1}{(\cos x)^n} \times \frac{\cos^{n+1}(x) - \cos((n+1)x) - i \sin((n+1)x)}{-i \sin(x)} \\ &= \frac{\sin((n+1)x)}{\cos^n(x) \sin(x)} + i \frac{\cos^{n+1}(x) - \cos((n+1)x)}{\cos^n x \sin x}.\end{aligned}$$

On en déduit

$$S = \frac{\sin((n+1)x)}{\cos^n(x) \sin(x)} \text{ et } T = \frac{\cos^{n+1}(x) - \cos((n+1)x)}{\cos^n x \sin x}.$$

3. Si  $x = 0 [\pi]$ , alors  $\frac{e^{ix}}{\cos x} = 1$ , et  $S + iT = n + 1$ . On en déduit  $S = n + 1$  et  $T = 0$ .

4. Si  $x \neq 0 [\pi]$ , alors

$$\begin{aligned}S + iT &= \frac{1 - \left( \frac{e^{ix}}{\cos x} \right)^{n+1}}{1 - \frac{e^{ix}}{\cos x}} \\ &= \frac{1}{(\cos x)^n} \times \frac{(\cos x)^{n+1} - e^{ix(n+1)}}{\cos x - e^{ix}} \\ &= \frac{1}{(\cos x)^n} \times \frac{\cos^{n+1}(x) - \cos((n+1)x) - i \sin((n+1)x)}{-i \sin(x)} \\ &= \frac{\sin((n+1)x)}{\cos^n(x) \sin(x)} + i \frac{\cos^{n+1}(x) - \cos((n+1)x)}{\cos^n x \sin x}.\end{aligned}$$



On en déduit

$$S = \frac{\sin((n+1)x)}{\cos^n(x) \sin(x)} \text{ et } T = \frac{\cos^{n+1}(x) - \cos((n+1)x)}{\cos^n x \sin x}.$$

5.  $D_n$  est une somme géométrique, de premier terme  $e^{-inx}$  et de raison  $e^{ix} \neq 1$ . On obtient donc

$$D_n = \frac{e^{-inx} - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{ix/2}}{e^{ix/2}} \times \frac{e^{-i(n+1/2)x} - e^{i(n+1/2)x}}{e^{-ix/2} - e^{ix/2}}.$$

On en déduit que

$$D_n = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{\sin(x/2)}.$$

Pour calculer  $K_n$ , une méthode (légèrement différente de celle de la question précédente) est d'écrire que  $\sin((n + \frac{1}{2})x) = \Im(e^{i(n+1/2)x})$ , puis d'utiliser une somme géométrique. On a en effet :

$$\begin{aligned} K_n &= \frac{1}{\sin(x/2)} \Im \left( \sum_{k=0}^n e^{i(k+1/2)x} \right) \\ &= \frac{1}{\sin(x/2)} \Im \left( e^{ix/2} \sum_{k=0}^n e^{ikx} \right) \\ &= \frac{1}{\sin(x/2)} \Im \left( e^{ix/2} \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \right) \\ &= \frac{1}{\sin(x/2)} \Im \left( e^{ix/2} \frac{e^{i(n+1)x/2} \sin((n+1)x/2)}{e^{ix/2} \sin(x/2)} \right) \\ &= \frac{\sin^2((n+1)x/2)}{\sin^2(x/2)}. \end{aligned}$$

### Correction de l'exercice 45 ▲

La somme des racines 5-ièmes de l'unité est nulle. On a donc

$$1 + e^{2i\pi/5} + e^{i4\pi/5} + e^{i6\pi/5} + e^{i8\pi/5} = 0.$$

Or,

$$e^{i8\pi/5} = e^{-2i\pi/5} \text{ et } e^{i6\pi/5} = e^{-4i\pi/5}.$$

Utilisant les formules d'Euler, on en déduit que

$$1 + 2\cos(2\pi/5) + 2\cos(4\pi/5) = 0.$$

Or,

$$\cos(4\pi/5) = 2\cos^2(2\pi/5) - 1,$$

ce qui donne

$$4\cos^2(2\pi/5) + 2\cos(2\pi/5) - 1 = 0.$$

$\cos(2\pi/5)$  est donc une racine de l'équation  $4X^2 + 2X - 1 = 0$ . Le discriminant de ce polynôme du second degré est  $\Delta = 20$ , et ses racines sont

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \text{ et } x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Puisque  $\cos(2\pi/5) > 0$ , on en déduit que

$$\cos(2\pi/5) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}.$$